**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ**

**ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА**

Методичні вказівки

до практичних занять та для самостійної роботи

з навчальної дисципліни

# ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

(*для студентів 2 курсу денної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр галузі знань 0601 «Будівництво та архітектура» за напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво»*)

**Харків – ХНАМГ – 2012**

Методичні вказівки до практичних занять та для самостійної роботи з навчальної дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» (для студентів 2 курсу денної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр галузі знань 0601 «Будівництво та архітектура» за напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво») / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: О. М. Хренов, М. Ю. Воєводіна. – Х.: ХНАМГ, 2012. – 31 с.

Укладачі: О. М. Хренов,
М. Ю. Воєводіна

Рецензент: проректор з інноваційних та інформаційних технологій Харківської національної академії міського господарства, к.т.н., доц. М. П. Пан

Рекомендовано для студентів спеціальності «Теплогазопостачання та вентиляція».

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики і інформаційних технологій, протокол № 1 від 30 серпня 2011 р.

**Заняття № 1**

## Основні поняття теорії ймовірностей. Класичне визначення ймовірності. Елементи комбинаторики. Безпосередній підрахунок ймовірностей

Випадкові й невипадкові події. Предмет теорії ймовірностей.

Явища, що спостерігаються нами (події). Можна розділити на три види: достовірні, неможливі, випадкові.

***Достовірною*** називають подію, що обов'язково відбудеться, якщо буде здійснена визначена сукупність умов.

***Неможливою*** називають подію, що явно не відбудеться, якщо буде здійснена визначена сукупність умов.

***Випадковою*** називають подію, що при здійсненні визначеної сукупності умов може або відбутися, або не відбутися.

Надалі замість того, щоб говорити «сукупність умов здійснена», будемо говорити коротко «зроблено випробування (зроблено спробу)». Таким чином, подія буде розглядатися як результат випробування.

Приклади:

Випробування – підкидання монети.

Подія – поява герба при падінні монети.

Випробування – постріл

Подія – влучення в мішень.

Випробування – проведення лекції

Подія – поява студента (той або інший студент частіше або рідше з'являється на лекції).

Події називають ***несумісними,*** якщо поява однієї з них виключає появу інших у тому самому випробуванні.

Приклад. Поява герба і поява цифри при підкиданні 1 – єї монети.

Поява 2-х гербів і 2-х цифр при киданні 2-х монет.

Декілька подій утворять ***повну групу***, якщо в результаті випробуванняи з'явиться хоча б одна з них.

Іншими словами, поява хоча б однієї з подій повної групи є достовірною подією.

Приклад. Поява герба і поява цифри при підкиданні 1-ї монети

Поява чорної і червоної масті при витягуванні карти з колоди

Якщо події, що утворюють повну групу, парами несумісні, в результаті випробуванняи з'явиться одна і тільки одна з цих подій.

Події називають ***рівноможливими***, якщо є підстави вважати, що жодне з них не є більш можливим, ніж інші.

Приклад. Випробування: підкидання монети. Події: поява герба і поява цифри.

***Елементарними подіями*** (або елементарними виходами) називають події, що утворять повну групу, тобто є парами несумісними і рівноможливими.

Ті елементарні події, в яких цікавляча нас подія наступає, назвемо ***сприяючими*** цій події.

Класичне визначення ймовірності.

***Ймовірністю події А називають відношення числа елементарних наслідків, що сприяють цій події, до загального числа елементарних наслідків випробування.***

Ймовірність події А позначають Р(А):

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

m – число наслідків, що сприяють події А

n – загальне число можливих наслідків випробування.

Ймовірність приймає значення від 0 до 1.

Ймовірність неможливої події дорівнює 0. Ймовірність достовірної події дорівнює 1.

Задача 1. Визначити ймовірність появи герба при одному киданні монети.

Подія А – поява герба при одному киданні.

Р(А) – ймовірність події А.

Можливі наслідки випробування: герб, цифра..

Вони – несумісні; рівноможливі й утворюють повну групу n=2.

Число наслідків , що сприяють появі події, дорівнює 1 (герб). M=1.

$P(A) = \frac{1}{2}$.

Задача 2. Визначити ймовірність того, що при киданні гральної кістки випаде не менше 5 очок

А – поява не менше 5 очок

Р(А) - ? Наслідки: 1, 2, 3, 4, 5, 6 – несумісні, рівноможливі, утворюють повну групу.

Наслідки , що сприяють: 5,6.

N=6 m=2.

$P(A) = \frac{2}{6}$.

Задача 3. В урні є a білих і b чорних куль. З урни навмання витягли кулю. Знайти ймовірність витягти білу (подія А) і чорну (подія В) кулю.

Число наслідків випробування дорівнює (a + b):

$P(A) = \frac{a}{a+b}$

$P(B) = \frac{b}{a+b}$.

Задача 4. З урни, що містить 3 білих і 3 чорних кулі, витягують 2 кулі. Знайти ймовірність того, що вони обидві виявляться білими.

1 2 3 4 5 6

Сприяючі наслідки:

$$\left.\begin{matrix} 1-2 \\ 1-3 \\ 2-3 \end{matrix}\right\} 3$$

Несприяючі наслідки:

$$\left.\begin{matrix} 1-4 & 2-4 & 3-5 & 4-5 & 5-6 \\ 1-5 & 2-5 & 3-5 & 4-6 & \\ 1-6 & 2-6 & 3-6 & & \end{matrix}\right\} 12$$

Число наслідків n = 15 (несумісні, рівноможливі й утворюють повну групу)
Число наслідків, що сприяють події, m = 3
P(A) = m/n = 3/15 = 1/5

Елементи комбінаторики.

***Комбінаторика*** – це розділ математики, в якому вивчаються кількісні характеристики різноманітних видів поєднань елементів, незалежно від природи самих елементів.

***Перестановками*** з m елементів називаються такі їхні поєднання, що відрізняються порядком входження до них елементів.

Приклад. Скласти всі можливі перестановки з трьох елементів (a, b, c):

abc bac cab acb bca cba

Формула визначення числа перестановок із m елементів:

$$\boxed{P_m = m!}$$

***Розміщеннями*** з n- елементів по m називаються такі поєднання m елементів, що вибираються із заданих n елементів, що відрізняються одне від одного або самими елементами, що входять у поєднання, або їхнім порядком.

Приклад. Скласти всі можливі розміщення з трьох елементів (a, b, c) по 2 елемента.

Ab ba
ac ca
bc cb

Формула визначення числа розміщень із n- елементів по m:

$$\boxed{A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}}$$

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

***Сполуками*** (або комбінаціями) з n елементів по m називаються такі поєднання m елементів, що вибираються із заданих n елементів, що відрізняються одне від одного тільки самими елементами, що входять у поєднання.

Приклад. Скласти всі можливі сполучення з трьох елементів (a, b, c) по 2 елемента.

Ab ba ac

Формула визначення числа сполучень: із n- елементів по m

$$\boxed{C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}}$$

$$C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3 .$$

Завдання для засвоєння матеріалу:

- Зареєструватися на відповідному курсі, розміщеному на сайті ДО.
- Повторити матеріал лекції, познайомитися з матеріалами ТЕМИ 1 на сайті ДО.
- Розвязати задачі індивідуального завдання №1, надіслати викладачу через відповідний активний елемент або здати в паперовому віріанті.
- Пройти експрес-тестування по ТЕМІ 1 на сайті ДО.

## Заняття № 2

## Теореми додавання і множення ймовірностей

Сума і добуток подій

Нехай проводиться деяке випробування (експеримент) з випадковим наслідком. Роздивимося множину $\Omega$ усіх можливих наслідків випробування; кожний його елемент $\omega \in \Omega$ будемо називати ***елементарною*** подією, а всю множину $\Omega$ - ***простором елементарних подій.*** Будь-яка подія А в теоретико-множинному трактуванні є деяка підмножина $\Omega$ : $A \subseteq \Omega$ .

Серед подій, що є підмножинами множини $\Omega$, можна роздивитися і саме $\Omega$ (адже кожна множина є своєю власною підмножиною); воно називається ***достовірною*** подією. До всього простору $\Omega$ елементарних подій додається ще і порожня множина $\varnothing$; ця множина теж розглядається як подія і називається ***неможливою*** подією.

Зауважимо, що елементарні події $\omega$ в тому самому випробуванні можна задавати по-різному; наприклад, при випадковому киданні точки на площину положення точки можна задавати як парою декартових координат (x,y), так і парою полярних $(\rho,\varphi)$.

***Сумою двох подій*** А і В називається подія С, яка полягає в тому, що відбувається принаймні одна з подій: або А або В, або обидві події разом.

Приклад. Випробування: вибір карти з колоди.
Події: А – поява трефової масті, В – поява туза, С – поява трефової масті (А) або туза (В)
С=А+В

***Добутком двох подій А і В*** називається подія D, яка полягає в тому, що відбудеться і подія А і подія В.
Приклад. Випробування: вибір карти з колоди.
Події: А – поява трефової масті, В – поява туза, D – поява трефового туза.
D = A · У ( D = A ∩ B)

Декілька подій $A_1$, $A_2$, … , $A_n$ утворять ***повну групу***, якщо $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ , тобто їхня сума (об'єднання) є достовірною подією.

Дві події А, В називають ***несумісними***, якщо відповідні множини не перетинаються, тобто $AB = \varnothing$.

***Протилежним*** стосовно події А називається подія $\bar{A}$, що полягає в непояві А та, як наслідок, що доповнює його до $\Omega$.

Приклади:
1) випробування – постріл по мішені:
   А – влучення в мішень
   $\bar{A}$ – невлучення в мішень;
2) випробування – підкидання грального кубика:
   А – поява парної цифри
   $\bar{A}$ – поява непарної цифри;
3) випробування – підкидання монети
   А – герб
   $\bar{A}$ – цифра;

Зокрема, якщо дві події А и $\bar{A}$ протилежні, вони утворюють повну групу несумісних подій і
$P(A) + P(\bar{A}) = 1$,
тобто ***сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці***.

***Теорема додавання:***
ймовірність суми несуміних подій дорівнює сумі їхніх ймовірностей.

***Теорема множення:***
ймовірність добутку (перетинання, суміщення) двох подій дорівнює ймовірності однієї з них, помноженої на умовну ймовірність другої при наявності першої.

Подія А називається **незалежною** від події В, якщо її ймовірність не залежить від того, відбулася В або ні, тобто P(A B)= P(A).

У протилежному випадку, якщо P(A B) ≠ P(A), подія А залежить від В.

Приклад 1. Випробування – два рази підкидається монета. Подія А – поява герба при першому киданні монети. Подія В – поява герба при другому киданні монети.
Події незалежні.

Приклад 2. Випробування – вибір куль з урни з двома білими й однією чорною кулями. Подія А – поява білої кулі при першому вийманні. Подія В – поява білої кулі при другому вийманні.

Події залежні.

Залежність і незалежність подій завжди взаємні: якщо А залежить від В, то і В залежить від А, і навпаки.

Доведемо це. Нехай подія А не залежить від У:

$P(A \ B) = P(A)$.

Запишемо правило множення у двох формах:

$P(AB) = P(A) \cdot P(B \ A)$

$P(AB) = P(B) \cdot P(A \ B)$.

Звідси, замінюючи в останньому виразі умовну ймовірність $P(A \ \ B)$ на «безумовну» $P(A)$, маємо:

$P(A)P(B \ A)) = P(B)P(A)$.

Для незалежних подій правило множення ймовірностей набуває особливо простого вигляду:

$P(AB) = P(A)\ P(B)$,

тобто ***ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій***.

Зауважимо, що якщо є декілька подій

$A_1, A_2, \ldots, A_n$,

то їхня попарна незалежність (тобто незалежність будь-яких двох подій Ai і Aj з різними індексами) ще не означає їхньої незалежності в сукупності.

Задача. Стрілець робить 3 постріли по мішені. Ймовірність влучення кожного пострілу однакова і дорівнює 0.9.

Знайти ймовірність того, що в мішені буде:

а) 0 влучень (подія – А);

б) 1 влучення (подія – В);

в) 2 влучення (подія – С);

г) 3 влучення (подія – D).

Знайти P(A); P(B); P(C); P(D).

Позначимо:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \text{ – влучення в 1-му пострілі} \\ A_2 \text{ – влучення в 2-му пострілі} \\ A_3 \text{ – влучення в 3-му пострілі} \end{array}\right\} \quad \text{події незалежні}$$

$D = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \qquad P(D) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0.9^3 = 0.\ 729$

$A = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \qquad P(A) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) =$

$= (1 - 0.9)^3 = 0.001$

$B = A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$

$P(B) = 3 \cdot 0.9 \cdot 0.1^2 = 0.027$

$C = A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3$

$P(C) = 3 \cdot 0.9^2 \cdot 0.1 = 0.243$

$P(A) + P(B) + P(C) + P(D) =1$

**Завдання для засвоєння матеріалу:**

- Зареєструватися на відповідному курсі, розміщеному на сайті ДО.
- Повторити матеріал лекції, познайомитися з матеріалами ТЕМИ 2 на сайті ДО.
- Розвязати задачі індивідуального завдання №2, надіслати викладачу через відповідний активний елемент або здати в паперовому віріанті.
- Пройти експрес-тестування по ТЕМІ 2 на сайті ДО.

## Заняття №3

## Наслідки основних теорем. Моделі надійності технічних систем. Формула повної ймовірності. Формула Бейеса

**Моделі надійності технічних систем**

Під надійністю системи будемо розуміти ймовірність її безвідмовної роботи за деякий проміжок часу T.

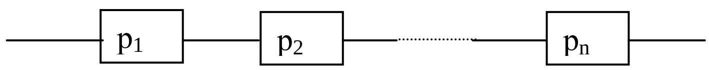
Надійність системи з послідовним з'єднанням елементів.

Послідовним з'єднанням елементів називається таке з'єднання елементів, при якому входом кожного такого елемента є вихід попереднього.

Будемо вважати, що при послідовному з'єднанні елементів система знаходиться в працездатному стані тільки тоді, коли працюють всі її елементи (відмова системи відбувається тоді, коли відмовляє хоча б один елемент системи).

Позначимо P – надійність всієї системи, $p_i$ – надійність i – го елемента. Визначимо значення P.

Модель системи з n послідовно з'єднаних елементів




Події

A – безвідмовна робота системи. P = P(A)

Ai – безвідмовна робота i-го елемента. P(Ai)=pi

$A = A_1A_2\ldots A_i\ldots A_n$

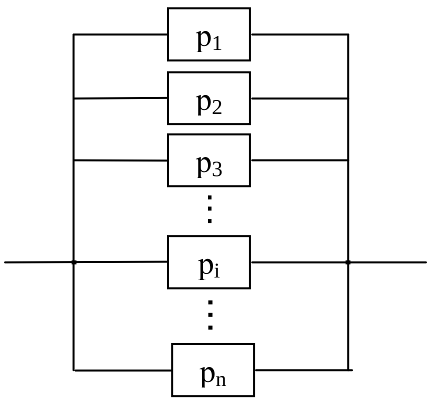
$A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n$ – події незалежні, значить

$P(A) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_i)\ldots P(A_n)$,

або в скороченому вигляді: $P = \prod_{i=1}^{n} p_i$

Надійність системи з паралельним з'єднанням елементів.

Паралельним з'єднанням елементів називається таке з'єднання, при якому всі елементи мають загальний вхід і загальний вихід. Будемо вважати, що при паралельному з'єднанні елементів система непрацездатна, якщо не працюють всі її елементи. Модель системи з n паралельно з'єднаними елементами




Позначимо:

$A$ - система працездатна.

$\bar{A}$ – система відмовила

$A_i$ – безвідмовна робота i-го елемента

$\bar{A}_i$ – відмова i-го елемента

$P(\bar{A}_i) = 1 - P(A_i)$

$P(\bar{A}_i) = 1 - p_i$

$\bar{A} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \ldots \bar{A}_i \ldots \bar{A}_n$

$\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots \bar{A}_i, \ldots \bar{A}_n$ – події незалежні.

$$P(\bar{A}) = \prod_{i=1}^{n} P(\bar{A}_i) = \prod_{i=1}^{n} [1 - P(A_i)],$$

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$,

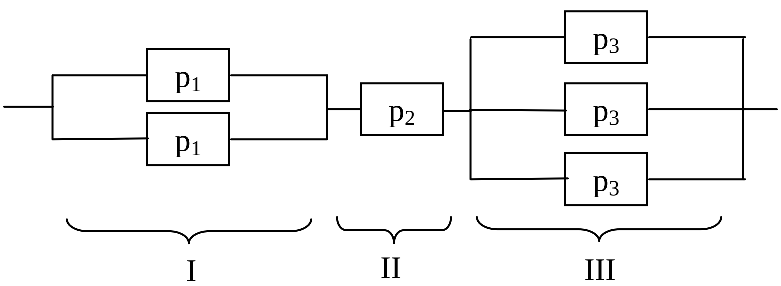
$$P = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i).$$

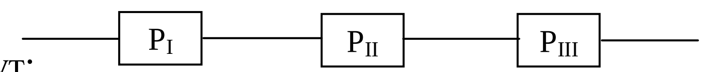
Надійність системи, що містить і послідовно, і паралельно з'єднані елементи. Для визначення надійності такої системи необхідно:

- розбити систему на декілька підсистем таким чином, щоб вони були сполучені між собою або послідовно, або паралельно;
- визначити надійність кожної з отриманих підсистем;
- використовуючи відповідну формулу для послідовно або паралельно сполучених елементів визначити надійність усієї системи.

Якщо одержувані підсистеми будуть включати як послідовне, так і паралельне з'єднання елементів, то для визначення їхньої надійності застосовують ту ж процедуру, що і для визначення надійності всієї системи.

Задача. Визначити надійність системи P за заданою надійністю окремих елементів.




Тут:

$p_1$ – ймовірність безвідмовної роботи елементів I блока

$p_{11}$ – ймовірність безвідмовної роботи елемента II блока

$p_{111}$ – ймовірність безвідмовної роботи елементів III блока

$P = P_I \cdot P_{II} \cdot P_{III} = [1 - (1 - p_1)^2]\, p_2 [1 - (1 - p_3)^3],$

$P_I = 1 - (1 - p_1)^2$

$P_{II} = p_2,$

$P_{III} = 1 - (1 - p_3)^3.$

**Формула повної ймовірності**

Нехай подія А може відбутися тільки з одним із повної групи несумісних подій (гіпотез):

$B_1, B_2, \ldots, B_n.$

Відомі апріорні можливості гіпотез:

$P(B_1), P(B_2), \ldots, P(B_n),$

і умовні можливості:

$P_{B1}(A), P_{B2}(A), \ldots, P_{Bn}(A_n)$

Тоді повна, або середня ймовірність події А визначається такою формулою:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\, P_{Bi}(A).$$

Задача. Завод виготовляє вироби, кожний з яких може працювати в одному із трьох режимів.

Відомо, що 20% виробів, що випускаються заводом, будуть працювати в I режимі (на Півночі); 75% - у II режимі (у середній смузі); 5% - у III режимі (в пустелі).

Ймовірність безвідмовної роботи виробу в I режимі 0,9, у II – 0,99; у III – 0,8. Необхідно визначити, скільки відсотків виробів потрібно випустити додатково до плану для заміни виробів, що відмовили.

Примітка. Припускємо, що при заміні виробів вони не відмовляють.

Роз’вязання

Знайдемо ймовірність відмови виробу

Позначимо: А – безвідмовна робота виробу

$B_1$ – виріб працює в I режимі

$B_2$ – виріб працює в II режимі

$B_3$ – виріб працює в III режимі

$P(B_1) = 0,2 \qquad P_{B1}(A) = 0,9$

$P(B_2) = 0,75 \qquad P_{B2}(A) = 0,99$

$P(B_3) = 0,05 \qquad P_{B3}(A) = 0,8$

P(A) -? Оскільки $P(\bar{A}) \cdot 100\%$ - шукане Роз’вязання.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P_{Bi}(A) = 0.2 \cdot 0.9 + 0.75 \cdot 0.99 + 0.05 \cdot 0.8 = = 0.18 + 0.7425 + 0.04 = 0.9625,$$

$P(A) = 1 - P(A) = 1 - 0.9625 = 0.0375,$

$\boxed{4}\ 0375 \cdot 100\% = 3.75\%.$

**Формула Бейеса**

Нехай подія A може відбутися тільки з одним із повної групи несумісних подій (гіпотез):

$B_1, B_2, \dots, B_n$.

Відомі апріорні (до випробування) ймовірності гіпотез:

$P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$

і умовні ймовірності

$P_{B1}(A), P_{B2}(A), \dots, P_{Bn}(A)$.

Відомо також, що в результаті випробування подія A відбулася, тоді апостеріорна (після випробування) ймовірність кожної i-ї гіпотези визначається такою формулою:

$$P_A(Bi) = \frac{P(Bi) \cdot P_{Bi}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(Bi) P_{Bi}(A)}.$$

Ця формула називається формулою Бейеса або теоремою гіпотез.

Доведення

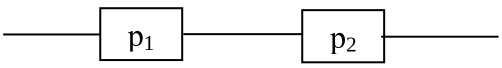
Знайдемо ймовірність добутку двох подій A и Bi

$P(A \cdot Bi) = P(A) \cdot P_A(Bi)$

$P(A \cdot Bi) = P(Bi) \cdot P_{Bi}(A)$

$$P_A(Bi) = (P(Bi)\, P_{Bi}(A))/P(A) = \frac{P(Bi) P_{Bi}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(Bi) P_{Bi}(A)}$$

Задача. Нехай система складається з двох послідовно з'єднаних елементів, надійності яких відомі.




$p_1 = 0.9$
$p_2 = 0.95$

У результаті випробуванняи стало відомо, що система відмовила. Знайти ймовірність того, що відмовив 1-й елемент, а другий – працює.

Роз’вязання.

$B_0$ – обидва елементи працюють,
$B_1$ – 1-й відмовив, 2-й працює,
$B_2$ – 1-й працює, 2-й відмовив,
$B_3$ – обидва відмовили,
A – відмова системи.

$P(B_0) = p_1 \cdot p_2 = 0.9 \cdot 0.95 = 0.855$ $\quad P_{B0}(A) = 0$
$P(B_1) = (1 - p_1)p_2 = 0.1 \cdot 0.95 = 0.095$ $\quad P_{B1}(A) = 1$
$P(B_2) = p_1(1 - p_2) = 0.9 \cdot 0.05 = 0.045$ $\quad P_{B2}(A) = 1$
$P(B_3) = (1 - p_1)(1 - p_2) = 0.1 \cdot 0.05 = 0.005$ $\quad P_{B3}(A) = 1$

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{\sum_{i=0}^{3} P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)} =$$

$= 0.095\cdot 1/(0.855\cdot 0 + 0.095\cdot 1 + 0.045\cdot 1 + 005\cdot 1) =$

$= 0.095/0.145 \approx 0.655.$

Завдання для засвоєння матеріалу:

- Зареєструватися на відповідному курсі, розміщеному на сайті ДО.
- Повторити матеріал лекції, познайомитися з матеріалами ТЕМИ 3 на сайті ДО.
- Розвязати задачі індивідуального завдання №3, надіслати викладачу через відповідний активний елемент або здати в паперовому віріанті.
- Пройти експрес-тестування по ТЕМІ 3 на сайті ДО.

## Заняття № 4

## Повторення випробувань. Формула Бернуллі. Локальна й інтегральна теореми Лапласа

**Формула Бернуллі**

Нехай проводиться n випробувань, у кожному з яких може відбутися деяка подія А.

Випробування називаються незалежними, якщо ймовірність появи події А в будь-якому випробуванні не залежить від наслідків інших випробувань.

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких може відбутися деяка подія А. Ймовірність появи події А в кожному випробуванні однакова і дорівнює p. Тоді ймовірність того, що в n випробуваннях подія А відбудеться рівно m разів, визначається за формулою

$$\boxed{P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}}$$

Ця формула називається формулою Бернуллі.

Bm – подія А відбулася m разом у n випробуванняи.

Задача. Для контролю відібрано 5 виробів. Ймовірність дефекту в кожному виробі 0.01. Визначити ймовірність того, що в двох з відібраних виробів виявиться дефект.

$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0.01^2(1-0.01)^3 = 5!/(3!2!)\cdot 0.0001\cdot 0.99^3 =$

$= 0.001\cdot 0.99^3 = 0.099^3 = 0.00097.$

Задача. Ймовірність появи події А в одному випробуванні дорівнює 0.9. Знайти ймовірність того, що в 15 незалежних випробуваннях подія А відбудеться 7 разів.

$P_{15}(7) = C_{15}^7 p^7 (1-p)^8 = 15!/(8!\,7!)\cdot 0.9^7\cdot 0.1^8 =$

$= 3\cdot 11\cdot 13\cdot 15\cdot 0.9^7\cdot 0.1^8 = 0.000030778.$

**Локальна теорема Лапласа**

Нехай проводиться n незалежних випробувань, у кожному з яких з ймовірністю p може відбутися деяка подія А. При великій кількості випробувань n ймовірність того, що в n випробуваннях подія А відбудеться рівно m разом може бути оцінена (тим точніше, чим більше n) за допомогою формули

$$Pn(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$x = (m - np)/\sqrt{(npq)}$   $q = 1 - p$,

$\varphi(x) = 1/\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Ця функція табульована.

$\varphi(-x) = \varphi(x)$ – функція парна.

При $x > 4$   $\varphi(x) = 0$.

Для попередньої задачі:

$\sqrt{(npq)} = \sqrt{(15 \cdot 0.9 \cdot 0.1)} = 1.16$

$x = (7 - 15 \cdot 0.9)/\sqrt{(npq)} = (7 - 15 \cdot 0.9)/ 1.16 =$

$= (7 - 13.5)/ 1.16 = - 5.6$

$P_{15}(7) = 1/1.16 \cdot \varphi(- 5.6) = 0.86 \cdot 0 = 0.$

**Інтегральна теорема Лапласа**

Нехай проводиться n незалежних випробувань, у кожному з яких з ймовірністю p може відбутися деяка подія А.

При великих n ймовірність того, що в n випробуваннях подія А відбудеться не менше, ніж $к_1$, і не більше, ніж $к_2$ разів, може бути оцінена ( тим точніше, чим більше n) за допомогою такої формули:

$$Pn(k1, k2) = \int_{x'}^{x''} \varphi(x)dx = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

де   $x' = (k1 - np)/\sqrt{(npq)}$

$x'' = (k2 - np)/\sqrt{(npq)}$   $q = 1 - p$.

$\Phi(x) = 1/\sqrt{2}\pi \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функція Лапласа (значення функції визначається за відповідною таблицею).

$\Phi(-x) = \Phi(x)$ – непарна функція,

Для $x \geq 5$   $\Phi(x) = 0.5$.

**Найімовірніша кількість появи подій**

Число $k_0$ (поява події в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p) називають найімовірнішим, якщо ймовірність того, що подія наступить у цих випробуваннях $k_0$ разом перевищує (або, принаймні, не менше) ймовірності інших можливих наслідків випробувань.

Найімовірніше число $k_0$ визначають з подвійної нерівності

$$np - q \le k_0 < np + p \qquad q = 1 - p$$

або за формулою

$$k_0 = [(n + 1)p],$$

де квадратні дужки позначають цілу частину числа.

Для розв'язання задач використовувати таблиці функцій в Додатках 1 і 2.

**Завдання для засвоєння матеріалу:**

- Зареєструватися на відповідному курсі, розміщеному на сайті ДО.
- Повторити матеріал лекції, познайомитися з матеріалами ТЕМИ 4 на сайті ДО.
- Розвязати задачі індивідуального завдання №4, надіслати викладачу через відповідний активний елемент або здати в паперовому віріанті.
- Пройти експрес-тестування по ТЕМІ 4 на сайті ДО.

## Заняття № 5
## Дискретні випадкові величини

Визначення випадкової величини

***Випадкова величина*** – це величина, що в результаті випробування приймає заздалегідь невідоме значення.

Приклади. 1. Кількість студентів, які присутні на лекції.
2. Кількість будинків, зданих в експлуатацію в поточному місяці.
4. t° навколишнього середовища.
5. Вага сколка снаряда, що розірвався.

Випадкові величини поділяються на дискретні й неперервні.

***Дискретною (перериваною)*** називають випадкову величину, що приймає окремі, ізольовані одне від одного значення з окремими ймовірностями.

Число можливих значень дискретної випадкової величини може бути скінченним або зчисленним.

***Законом розподілу випадкового величини*** називається будь-яке правило (таблиця, функція), що дозволяє знаходити ймовірності всіляких подій, пов'язаних із випадковою величиною (наприклад, ймовірність того, що вона набуде якесь значення або потрапить на якійсь інтервал).

**Ряд розподілу**

Це таблиця, у верхньому рядку якої перераховані в порядку зростання всі можливі значення випадкової величини X: $x_1$, $x_2$, …, $x_n$, а в нижній – ймовірності цих значень: $p_1, p_2, \ldots, p_n$, де $p_i = P\{X = x_i\}$.

| X | $x_1$ | $x_2$ | ...... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| P | $p_1$ | $p_2$ | ...... | $p_n$ |

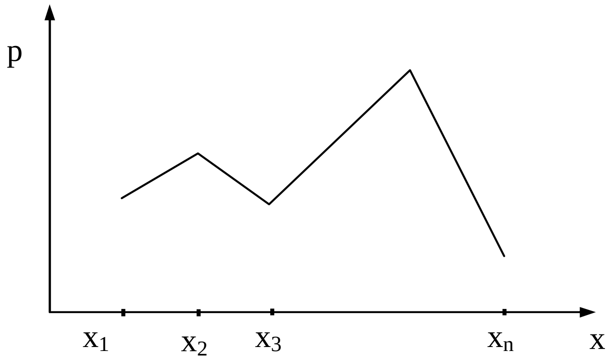
Оскільки події $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, … несумісні і утворюють повну групу, сума всіх ймовірностей, що містяться у нижньому рядку ряду розподілу, дорівнює одиниці

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Ряд розподілу використовується для завдання закону розподілу тільки дискретних випадкових величин.

Багатокутник розподілу

Графічне зображення ряду розподілу називається багатокутником розподілу. Будується він так: для кожного можливого значення в. В. Постає перпендикуляр до осі абсцис, на якому відкладається ймовірність даного значення в. В. Отримані точки для наочності (і тільки для наочності!) з'єднуються відрізками прямих.




**Інтегральна функція розподілу** (або просто функція розподілу).

Це функція, яка при кожному значенні аргументу x чисельно дорівнює ймовірності того, що випадкова величина X виявиться менше за значення аргументу x

Функція розподілу позначається F(x):

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

**Властивості інтегральної функції розподілу**

2. Значення функції розподілу належать відрізку [0, 1];

$0 \le F(x) \le 1$.

3. F(x) – функція , що не спадає, тобто

$F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

4. Ймовірність того, що в. В. Набуде значення яке міститься в інтервалі (a, b), дорівнює збільшенню функції розподілу на цьому інтервалі:

$P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a)$.

5. Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде одне визначене значення, дорівнює нулю.
6. Якщо можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a, b), то: 1) $F(x) = 0$ при $x \le a$; 2) $F(x) = 1$ при $x > b$.

Задача. Побудувати ряд розподілу, многокутник розподілу і функцію розподілу для випадкової величини X, де X – кількість будинків зданих у термін із 4-х, що будуються, якщо ймовірність побудувати будинок у термін для кожного будинку однакова і дорівнює 0.9.

Роз'вязання. За умовою задачі проводяться чотири незалежних випробування (випробування – будівництво будинку), у кожному з яких може відбутися подія «будинок побудований у термін» з однією і тією ж ймовірністю 0.9. Тому для визначення ймовірності конкретної кількості будинків, побудованих у термін застосовуємо формулу Бернуллі. В. В. X може набувати значеннь: 0, 1, 2, 3, 4.

$P0 = P\{X = 0\} = C_4^0 \cdot 0.9^0 \cdot 0.1^4 = 0.1^4$

$P_1 = P\{X = 1\} = C_4^1 \cdot 0.9 \cdot 0.1^3 = 4 \cdot 0.9 \cdot 0.1^3 = 0.0036$

$P_2 = P\{X = 2\} = C_4^2 \cdot 0.9^2 \cdot 0.1^2 = 0.0486$

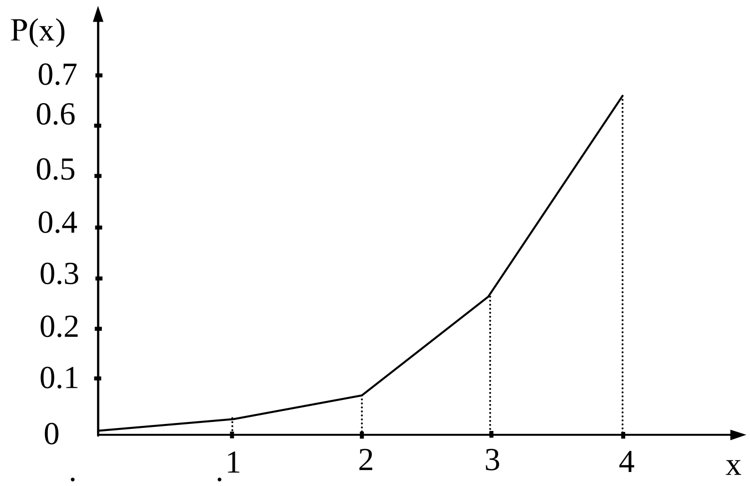
$P_3 = P\{X = 3\} = C_4^3 \cdot 0.9^3 \cdot 0.1 = 0.2916$

$P_4 = P\{X = 4\} = C_4^4 \cdot 0.9^4 \cdot 0.1^0 = 0.6561$

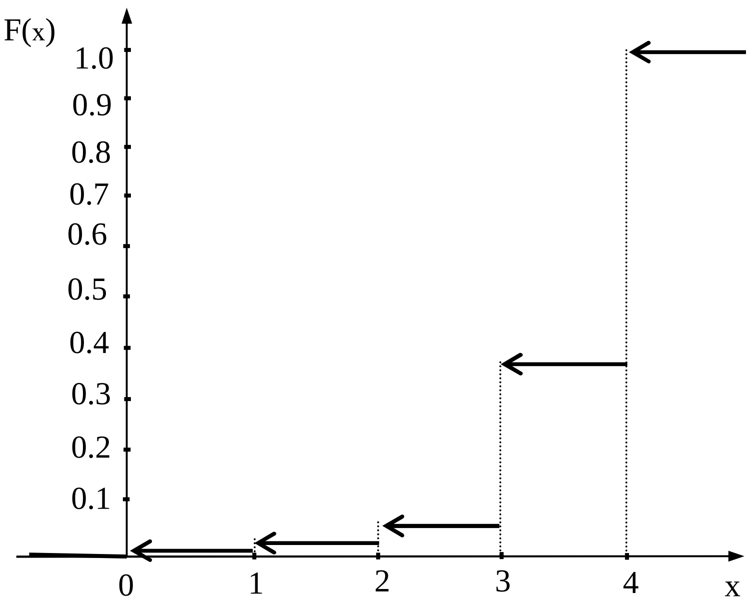
Ряд розподілу

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| p | 0.0001 | 0.0036 | 0.0486 | 0.2916 | 0.6561 |

Багатокутник розподілу




Функція розподілу



$x \le 0 \qquad F(x) = P(X < x) = 0$

$0 < x \le 1 \qquad F(x) = P( X < x) = P(X = 0) = 0.0001$

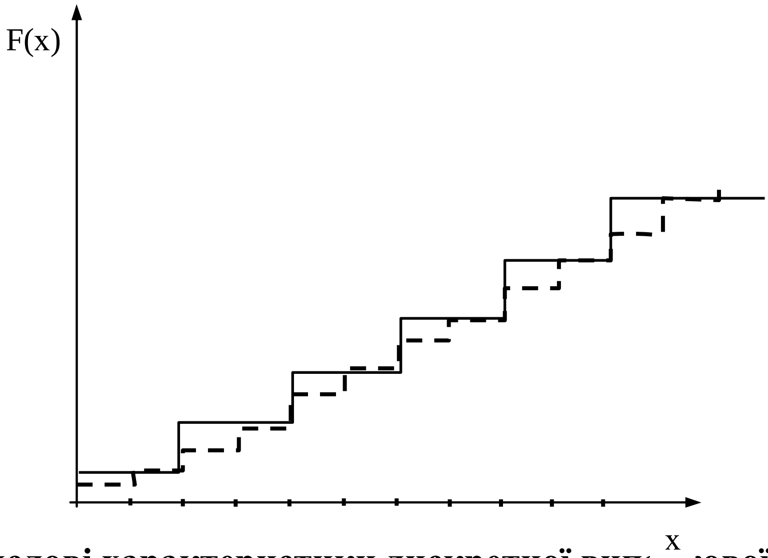
$1 < x \le 2 \qquad F(x) = P( X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.0037$

$2 < x \le 3 \qquad F(x) = P( X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) +$
$\qquad + P(X = 2) = 0.0523$

$3 < x \le 4 \qquad F(x) = P\{X<x\} = P\{X=0\} + P\{X=1\}+ P\{X=2\}+$
$\qquad + P\{X=3\}= 0.3439$

$4 < x \le \infty \qquad F(x) = 1.$

Для дискретної в. В. Функція розподілу є кусочно-постійною функцією. При збільшенні числа значень в. В. Число сходинок на графіку зростає, а їхня висота зменшується. При $n \to \infty$ кусочно-постійна функція перетворюється в неперервну функцію.




**Числові характеристики дискретної випадкової величини**

1. ***Математичне сподівання*** – є середнє зважене значень випадкової величини X, в якої абсциса кожної точки $x_i$ входить із «вагою», рівною відповідній ймовірності.

Математичне сподівання іноді називають просто середнім значенням в. В.
Позначення: $m_x$ або M [X].
Для дискретної випадкової величини

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

2. ***Дисперсія*** характеризує розсіяння випадкової величини навколо її математичного сподівання.

$$D[X] = M[(X - m_x)^2]$$

Завдання для засвоєння матеріалу:

- Зареєструватися на відповідному курсі, розміщеному на сайті ДО.
- Повторити матеріал лекції, познайомитися з матеріалами ТЕМИ 5 на сайті ДО.
- Розвязати задачі індивідуального завдання №5, надіслати викладачу через відповідний активний елемент або здати в паперовому вірiанті.

## Заняття № 6

## Неперервні випадкові величини

***Неперервною*** називають випадкову величину, що може приймати будь-які значення з деякого скінченного або нескінченного проміжка.

Очевидно, число можливих значень неперервної випадкової величини нескінченне.

**Щільність розподілу ймовірностей**.

Неперервну в. В. Можна задати, використовуючи функцію, яку називають щільністю розподілу або щільністю ймовірності, або диференціальною функцією розподілу.

***Щільністю розподілу*** ймовірностей неперервної в. В. X називають функцію f(x) – першу похідну від функції розподілу F(x):

$$\boxed{f(x) = F'(x)}$$

З цього визначення випливає, що функція розподілу є первісною для щільності розподілу.

Для опису розподілу ймовірностей дискретної в. В. Щільність розподілу не застосовується.

Ймовірнісний зміст щільності розподілу:

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (F(x + \Delta x) - F(x))/\Delta x$$

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (P\{X \in [x, x + \Delta x]\})/\Delta x.$$

Таким чином, межа відношення ймовірності того, що неперервна в. в. набуде значення, що належить інтервалу $(x, x + \Delta x)$, до довжини цього інтервалу (при $\Delta x \to 0$) дорівнює значенню щільності розподілу в точці x.

Функція щільності характеризує кожне значення неперервної випадкової величини окремо, а не цілий діапазон як це має місце для функції розподілу.

Ймовірність влучення неперервної в. В. У заданий інтервал.

За формулою Ньютона – Лейбніца:

$P\{a < X < b\} = F(b) - F(a),$

Визначення функції розподілу за відомою функцією щільності.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

**Властивості щільності розподілу**

1. . Щільність розподілу – невід’ємна функція*:*

тобто $f(x) \geq 0$ (тому що інтегральна функція розподілу – функція, що не спадає, а щільність розподілу її перша похідна).

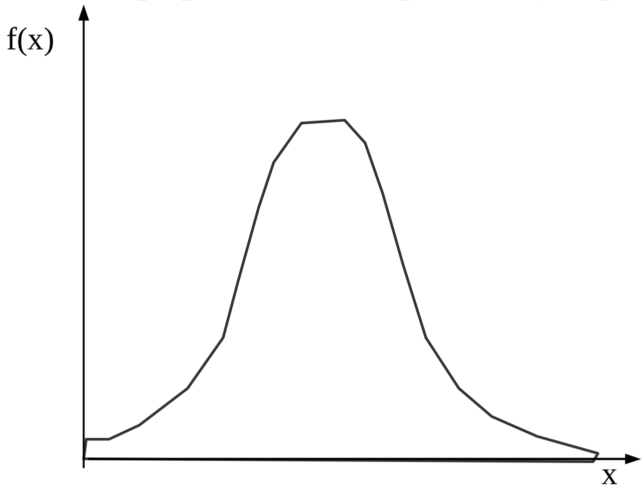
2. Властивість 2.

$\int f(x)dx = 1$

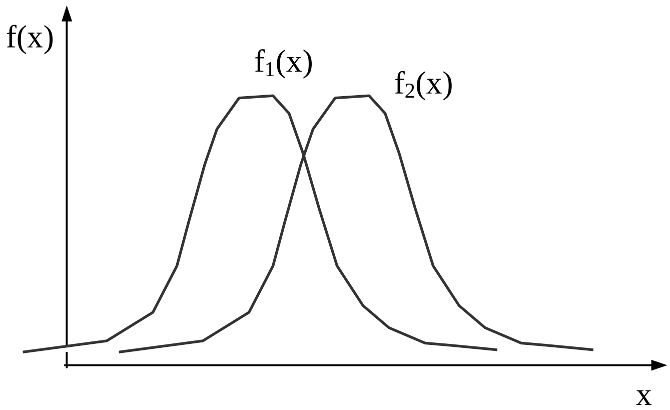
є виразом ймовірності події, яка полягає в тому, що випадкова величина набуде значення, що належить інтервалу $(-\infty, \infty)$. Очевидно, така подія є достовірною, отже, ймовірність її дорівнює одиниці.

Геометрично це означає, що вся площа криволінійної трапеції, обмежена віссю 0x і кривою розподілу, дорівнює одиниці.

Можливий графік щільності розподілу (приклад)




Задача .




$f_1(x)$ – щільність розподілу величини виграшу в 1-й грі
f2(x) – щільність розподілу величини виграшу в 2-й грі.

Якій грі слід віддати перевагу?

**Числові характеристики неперервної випадкової величини**

1. ***Математичне сподівання*** – є середнє зважене значень випадкової величини X, в якої абсциса кожної точки $x_i$ входить із «вагою», рівною відповідній ймовірності.

Математичне сподівання іноді називають просто середнім значенням в. В.
Позначення: $m_x$ або M [X].
Для неперервної випадкової величини

$$\boxed{\boldsymbol{M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx}}$$

2. ***Диперсія*** характеризує розсіяння випадкової величини навколо її математичного сподівання.

$$D[x] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \, dx$$

Завдання для засвоєння матеріалу:

- Зареєструватися на відповідному курсі, розміщеному на сайті ДО.
- Повторити матеріал лекції, познайомитися з матеріалами ТЕМИ 6 на сайті ДО.
- Розвязати задачі індивідуального завдання №6, надіслати викладачу через відповідний активний елемент або здати в паперовому віріанті.
- Пройти тестування по ТЕМАМ 5-6 на сайті ДО.

## Заняття № 7

## Основні задачі математичної статистики. Визначення законів розподілу випадкових величин на основі експериментальних даних. Перевірка статистичних гіпотез

За метеріалами останніх 2х занять виконується ЗАВДАННЯ «Статистичний аналіз випадкових величин» за індивідуальним варіантом. Приклад виконання такого завдання розміщено на сайті ДО. Завдання рекомендується виконувати за допомогою EXCEL, але це не обовязково. Виконане завдання надіслати викладачу через відповідний активний елемент на сайті ДО, згодом роздрукувати.

До основних задач математичної статистики відносяться:

- Задача визначення закону розподілу випадкової величини по статистичним даним.
- Задача перевірки правдоподібності гіпотез.
- Задача визначення невідомих параметрів розподілу.

**Статистична функція розподілу**

Статистичною функцією розподілу випадкової величини X називається частота події X<x у даному статистичному матеріалі

$$F^*(x)=P^*(X<x)$$

Для того щоб знайти значення статистичної функції розподілу при даному x, досить підрахувати число дослідів, у яких величина X прийняла значення, менше ніж x, і розділити на загальне число n зроблених дослідів.

**Статистичний ряд**

Розділимо весь діапазон спостережених значень X на інтервали або «розряди» і підрахуємо кількість значень mi, що приходиться на кожний i-ий розряд. Це число розділимо на загальне число спостережень n і знайдемо частоту, що відповідає даному розряду:

$$p_i^*=m_i/n$$

Сума частот усіх розрядів очевидно, повинна дорівнювати одиниці.

Побудуємо таблицю, у якій приведені розряди в порядку їхнього розташування уздовж осі абсцис і відповідні частоти. Ця таблиця називається статистичним рядом:

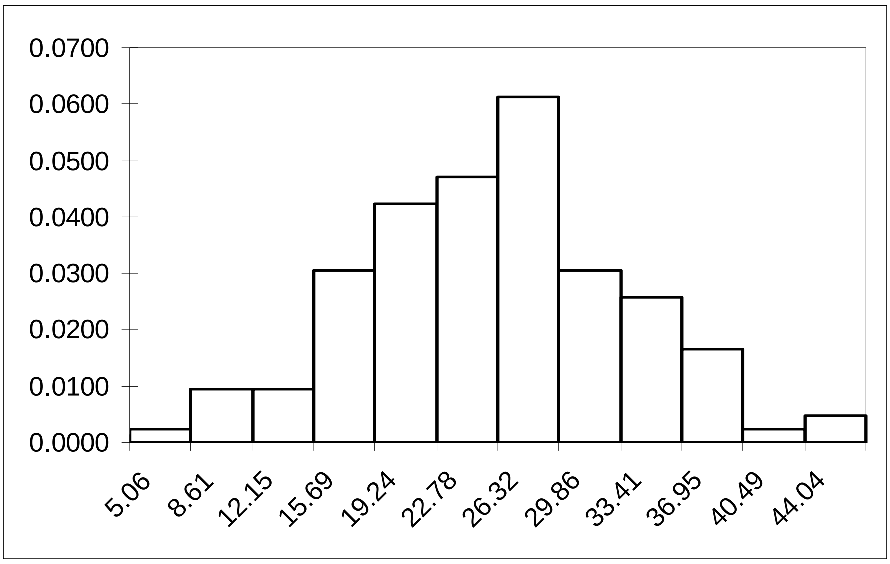
| Ii | x1;x2 | x2;x3 | . . . | xi;xi+1 | . . . | xk;xk+1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| pi* | p1* | p2* | | pi* | | pk* |

Тут Ii– позначення i-го розряду; xi;xi+1– його границі; pi*– відповідна частота; k– число розрядів. При виборі рівних інтервалів розбивки діапазону зміни випадкової величини оптимальна довжина інтервалу може бути визначена по оптимальній кількості інтервалів у відповідності з таблицею:

| n | 100 | 200 | 400 | 600 | 800 | 1000 | 1500 | 2000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| k | 12 | 16 | 20 | 24 | 27 | 30 | 35 | 37 |

**Гістограмма**

Статистичний ряд часто оформляється графічно у виді гистограмми. Гистограмма будується в такий спосіб. По осі абсцис відкладаються розряди, і на кожному з розрядів як на підставі будується прямокутник, площа якого дорівнює частоті даного розряду. Для побудови гистограмми потрібно частоту кожного розряду розділити на його довжину й отримане число взяти як висоту прямокутника. У випадку рівних по довжині розрядів висоти прямокутників пропорційні відповідним частотам. Зі способу побудови гистограмми випливає, що повна площа її дорівнює одиниці.



**Числові характеристики статистичного розподілу**

Кожній числовій характеристиці випадкової величини X відповідає її статистична аналогія. Для математичного очікування випадкової величини аналогією є середнє арифметичне спостережених значень випадкової величини:

$$M^*[X] = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

де xi– значення випадкової величини, спостережене в і-м досліді, n– число дослідів.

Ця характеристика називається статистичним середнім випадкової величини.

$$D[X] = M\left[(X - m_x)^2\right]$$

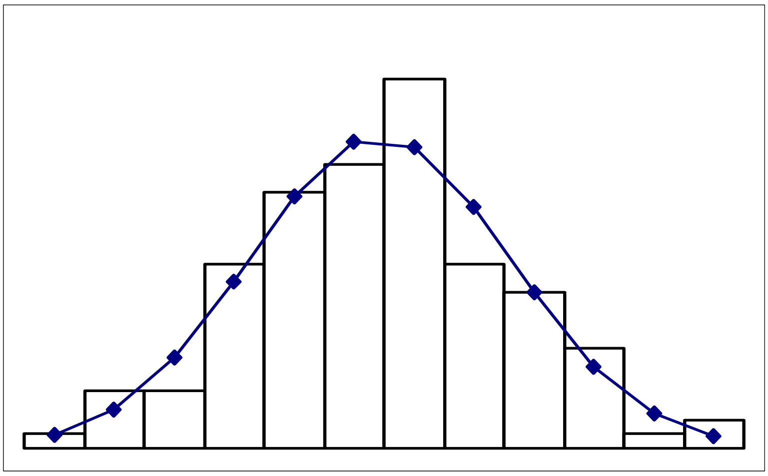
Якщо в цьому виразі замінити математичне очікування його статистичною аналогією – середнім арифметичним, ми одержимо статистичну дисперсію випадкової величини X:

$$D^*[X] = \frac{\sum \left(x_i - m_x^*\right)^2}{n}$$

де mx*=M*[X]– статистичне середнє.

Природно припустити, що досліджувана випадкова величина X підкоряється нормальному закону:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



Тоді задача вирівнювання переходить у задачу про раціональний вибір параметрів m і σ.
Будь-яка аналітична функція  за допомогою якої вирівнюється статистичний розподіл, повинна мати основні властивості щільності розподілу:

$$\left.\begin{aligned} f(x) \geq 0; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{aligned}\right\}$$

**Застосування критеріїв згоди полягає в наступному**

Одним із найбільше часто використовуваних критеріїв згоди є, так званий, «критерій χ2» Пірсона.
Припустимо, що зроблено  n незалежних дослідів, у кожному з яких випадкова величина  X прийняла визначене значення. Результати дослідів зведені в k розрядів і оформлені у виді статистичного ряду:

| Ii | x1; x2 | X2; x3 | … | xk; xk+1 |
|---|---|---|---|---|
| pi* | p1* | p2* | … | pk* |

Потрібно перевірити, чи погодяться експериментальні дані з гіпотезою про те, що випадкова величина X має даний закон розподілу (заданий функцією розподілу F(x) або  щільністю f(x) ). Назвемо цей закон розподілу «теоретичним».
Знаючи теоретичний закон розподілу, можна знайти теоретичні ймовірності улучення випадкової величини в кожний з розрядів:
p1, p2, . . . , pk.

Перевіряючи погодженість теоретичного й статистичного розподілів, будемо виходити з розбіжності між теоретичними ймовірностями pi і спостереженими частотами pi*. Природно вибрати як міру розбіжності між теоретичним і статистичним розподілами суму квадратів відхилень (pi*-pi), узятих із деякими «вагами» ci:

$$U = \sum_{i=1}^{k} c_i \left(p_i^* - p_i\right)^2$$

К. Пірсон показав, що якщо покласти

$$c_i = \frac{n}{p_i},$$

то при великих n закон розподілу величини U має досить прості властивості: він практично не залежить від функції розподілу F(x) і від числа дослідів n , а залежить  тільки від числа розрядів k, а саме, цей закон при збільшенні n наближається до так називаного «розподілу χ2»
При такому виборі коефіцієнтів ci міра розбіжності, звичайно, позначається χ2:

$$\chi^2 = n\sum_{i=1}^{k} \frac{\left(p_i^* - p_i\right)^2}{p_i}$$

Розподіл χ2 залежить від параметра r, називаного числом «ступенів свободи» розподілу. Число «ступенів волі» r дорівнює числу розрядів k мінус число незалежних умов («зв'язків»), накладених на частоти pi*. Прикладами таких умов можуть бути

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^* = 1,$$

якщо ми вимагаємо тільки того, щоб сума частот дорівнювала одиниці (ця вимога накладається у всіх випадках);

$$\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i p_i = m_x,$$

якщо ми підбираємо теоретичний розподіл із тією умовою, щоб збігалися теоретичне і статистичне середні значення;

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\tilde{x}_i - m_x^*\right)^2 p_i^* = D_x,$$

якщо ми вимагаємо, крім того, збігу теоретичної й статистичної дисперсій і т.д. Для розподілу χ2 складені спеціальні таблиці. Фрагмент такої таблиці приведений нижче:

| r | p | | |
|---|---|---|---|
| | 0,10 | 0,05 | 0,02 |
| 8 | 13,36 | 15,51 | 18,17 |
| 9 | 14,68 | 16,92 | 19,68 |
| 10 | 15,99 | 18,31 | 21,20 |

У цій таблиці входами є: значення ймовірності p і число ступенів волі r. Числа що записані в таблиці, являють собою значення χz2 для яких виконується умова

$$P\{\chi^2 \geq \chi_z^2\} = p_z,$$

де pz– задане значення p.

Схема застосування критерію до оцінки погодженості теоретичного й статистичного розподілів зводиться до наступного:

1) визначається міра розбіжності χ2набл по формулі

$$\chi^2_{набл} = n\sum_{i=1}^{k} \frac{\left(p_i^* - p_i\right)^2}{p_i}$$

2) визначається число ступенів волі r як число розрядів k мінус число накладених зв'язків s:

r=k – s

3) по r і заданому малому значенню p по таблиці визначається значення $\chi$2крит для якого справедливо

$$P\left\{\chi^2 \geq \chi^2_{крит}\right\} = p$$

4) якщо, $\chi^2_{набл} < \chi^2_{крит}$ то гіпотезу можна визнати як не суперечну дослідним даним, у противному випадку гіпотеза відкидається як неправдоподібна.

Наскільки мала повинна бути імовірність p для того, щоб відкинути або переглянути гіпотезу, – питаннє невизначене; воно не може бути вирішеним з математичних розумінь, так само як і питання про те, наскільки мала повинна бути імовірність події для того, щоб вважати його практично неможливим. На практиці, рекомендується вибирати p≤0,1.

## Заняття № 8

## Оцінка параметрів випадкових величин

**Оцінки для математичного очікування й дисперсії**

Нехай мається випадкова величина X з математичним очікуванням m і дисперсією D; обоє параметра невідомі. Над величиною X зроблено n незалежних дослідів, що дали результати X1, X2, . . . , Xn.

Як оцінку для математичного очікування природно взяти статистичне середнє m*:

$$\tilde{m} = m^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Ця оцінка є спроможною і незміщеною. Якщо величина X розподілена за нормальним законом, дисперсія буде мінімально можливою, тобто оцінка є ефективною. Для інших законів розподілу це може бути і не так.

Якщо як оцінку дисперсії взяти статистичну дисперсію D*

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \tilde{m})^2}{n},$$

то при перевірки виявиться, що ця оцінка спроможна, але не є незміщеною. Її математичне очікування:

$$M\left[D^*\right] = \frac{n-1}{n} D$$

Користуючись оцінкою D* замість дисперсії D, ми будемо робити деяку систематичну помилку в меншу сторону. Щоб ліквідувати цей зсув, досить ввести виправлення, помноживши величину D* на n/(n-1).

Оцінка

$$\tilde{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \tilde{m})^2}{n-1}$$

називається «виправленою» статистичною дисперсією. Ця оцінка спроможна і незміщена, але ефективною вона не є. Однак у випадку нормального розподілу вона є «асимптотично ефективною», тобто при збільшенні n відношення її дисперсії до мінімально можливого необмежено наближається до одиниці.

**Довірчий інтервал. Довірча імовірність**

Щоб дати уявлення про точність і надійність оцінки ã, у математичній статистиці користуються так званими довірчими інтервалами і довірчими імовірностями. Ці поняття особливо актуальні при малому числі спостережень, коли крапкова оцінка ã значною мірою випадкова і наближена заміна а на ã може привести до серйозних помилок.

Нехай для параметра а отримана незміщена оцінка ã. Ми хочемо оцінити можливу при цьому помилку. Призначимо деяку досить велику імовірність (наприклад, β=0,9, 0,95 або 0,99) таку, що подію з імовірністю β можна вважати практично достовірною, і знайдемо таке значення ε, для якого

$$P(|\tilde{a} - a| < \varepsilon) = \beta$$

Тоді діапазон практично можливих значень помилки, що виникає при заміні а на ã, буде $\pm\varepsilon$; великі по абсолютній величині помилки будуть з'являтися тільки з малою імовірністю.

Перепишемо приведене вище рівняннє у виді:

$$P(\tilde{a} - \varepsilon < a < \tilde{a} + \varepsilon) = \beta$$

Це означає , що з імовірністю β невідоме значення параметра а попадає в інтервал

Iβ=(ã-ε; ã+ε).

Довірчим називають інтервал, що покриває невідомий параметр із заданою імовірністю (надійністю).

Довірчою імовірністю (надійністю) називається імовірність з якої здійснюється нерівність $|\tilde{a} - a| < \varepsilon$.

Величина а не випадкова, зате випадковий інтервал. Випадково його положення на осі абсцис, обумовлене його центром ã; випадкова довжина інтервалу 2ε, тому що величина ε обчислюється, як правило, по експериментальним даним. Тому краще тлумачити величину β не як імовірність «улучення» значення а в інтервал Iβ, а як імовірність того, що випадковий інтервал Iβ накриє значення а.

**Залежні й незалежні випадкові величини**

Кореляційний момент для двовимірного випадкового вектора – це другий змішаний центральний момент.

$$Kxy = \mu 11 = M[(X - mx)(Y - my)] =$$

$$= \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - m_x)(y_j - m_y) \cdot p_{ij} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x,y) dxdy \end{cases}$$

$$pij = P\{X = xi,\ Y = yj\}$$

Кореляційний момент характеризує ступінь розсіяння випадкових величин навколо їхніх математичних сподівань, а також залежність між випадковими величинами X таY.

Для характеристики тільки залежності між випадковими величинами використовується коефіцієнт кореляції

$$rxy = \frac{K_{xy}}{y_x \cdot y_y}.$$

Значення коефіцієнта кореляції міститься в діапазоні від -1 до +1.

Якщо x і y незалежні, rxy = 0.

Якщо випадкові величини X і Y зв'язані лінійною функціональною залежністю Y = a + b, то

rxy = -1, якщо a < 0;

rxy = 1, якщо a > 0.

$$Rij = \frac{K_{ij}}{y_i y_j} \qquad rii = \frac{D_i}{y_i^2} = 1 \qquad rij = rji$$

Додаток 1 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,3989 | 3989 | 3989 | 3988 | 39986 | 3984 | 3982 | 3980 | 3977 | 3973 |
| 0,1 | 0,3970 | 3965 | 3961 | 3956 | 3951 | 3945 | 3939 | 3932 | 3925 | 3918 |
| 0,2 | 0,3910 | 3902 | 3894 | 3885 | 3876 | 3867 | 3857 | 3847 | 3836 | 3825 |
| 0,3 | 0,3814 | 3802 | 3790 | 3778 | 3765 | 3752 | 3739 | 3726 | 3712 | 3697 |
| 0,4 | 0,3683 | 3668 | 3653 | 3637 | 3621 | 3605 | 3589 | 3572 | 3555 | 3538 |
| 0,5 | 0,3521 | 3503 | 3485 | 3467 | 3448 | 3429 | 3410 | 3391 | 3372 | 3352 |
| 0,6 | 0,3332 | 3312 | 3292 | 3271 | 3251 | 3230 | 3209 | 3187 | 3166 | 3144 |
| 0,7 | 0,3123 | 3101 | 3079 | 3056 | 3034 | 3011 | 2989 | 2966 | 2943 | 2920 |
| 0,8 | 0,2897 | 2874 | 2850 | 2827 | 2803 | 2780 | 2756 | 2732 | 2709 | 2685 |
| 0,9 | 0,2661 | 2637 | 2613 | 2589 | 2565 | 2541 | 2516 | 2492 | 2468 | 2444 |
| 1,0 | 0,2420 | 2396 | 2371 | 2347 | 2323 | 2299 | 2275 | 2251 | 2227 | 2203 |
| 1,1 | 0,2179 | 2155 | 2131 | 2107 | 2083 | 2059 | 2036 | 2012 | 1989 | 1965 |
| 1,2 | 0,1942 | 1919 | 1895 | 1872 | 1849 | 1826 | 1804 | 1781 | 1758 | 1736 |
| 1,3 | 0,1714 | 1691 | 1669 | 1647 | 1626 | 1604 | 1582 | 1561 | 1539 | 1518 |
| 1,4 | 0,1497 | 1476 | 1456 | 1435 | 1415 | 1394 | 1374 | 1354 | 1334 | 1315 |
| 1,5 | 0,1295 | 1276 | 1257 | 1238 | 1219 | 1200 | 1182 | 1163 | 1145 | 1127 |
| 1,6 | 0,1109 | 1092 | 1074 | 1057 | 1040 | 1023 | 1006 | 0989 | 0973 | 0957 |
| 1,7 | 0,0940 | 0925 | 0909 | 0893 | 0878 | 0863 | 0848 | 0833 | 0818 | 0804 |
| 1,8 | 0,0790 | 0775 | 0761 | 0748 | 0734 | 0721 | 0707 | 0694 | 0681 | 0669 |
| 1,9 | 0,0656 | 0644 | 0632 | 0620 | 0608 | 0596 | 0584 | 0573 | 0562 | 0551 |
| 2,0 | 0,0540 | 0529 | 0519 | 0508 | 0498 | 0488 | 0478 | 0468 | 0459 | 0449 |
| 2,1 | 0,0440 | 0431 | 0422 | 0413 | 0404 | 0396 | 0387 | 0379 | 0371 | 0363 |
| 2,2 | 0,0355 | 0347 | 0339 | 0332 | 0325 | 0317 | 0310 | 0303 | 0297 | 0290 |
| 2,3 | 0,0283 | 0277 | 0270 | 0264 | 0258 | 0252 | 0246 | 0241 | 0235 | 0229 |
| 2,4 | 0,0224 | 0219 | 0213 | 0208 | 0203 | 0198 | 0194 | 0189 | 0184 | 0180 |
| 2,5 | 0,0175 | 0171 | 0167 | 0163 | 0158 | 0154 | 0151 | 0147 | 0143 | 0139 |
| 2,6 | 0,0136 | 0132 | 0129 | 0126 | 0122 | 0119 | 0116 | 0113 | 0110 | 0107 |
| 2,7 | 0,0104 | 0101 | 0099 | 0096 | 0093 | 0091 | 0088 | 0086 | 0084 | 0081 |
| 2,8 | 0,0079 | 0077 | 0075 | 0073 | 0071 | 0069 | 0067 | 0065 | 0063 | 0061 |
| 2,9 | 0,0060 | 0058 | 0056 | 0055 | 0053 | 0051 | 0050 | 0048 | 0047 | 0046 |
| 3,0 | 0,0044 | 0043 | 0042 | 0040 | 0039 | 0038 | 0037 | 0036 | 0035 | 0034 |
| 3,1 | 0,0033 | 0032 | 0031 | 0030 | 0029 | 0028 | 0027 | 0026 | 0025 | 0025 |
| 3,2 | 0,0024 | 0023 | 0022 | 0022 | 0021 | 0020 | 0020 | 0019 | 0018 | 0018 |
| 3,3 | 0,0017 | 0017 | 0016 | 0016 | 0015 | 0015 | 0014 | 0014 | 0013 | 0013 |
| 3,4 | 0,0012 | 0012 | 0012 | 0011 | 0011 | 0010 | 0010 | 0010 | 0009 | 0009 |
| 3,5 | 0,0009 | 0008 | 0008 | 0008 | 0008 | 0007 | 0007 | 0007 | 0007 | 0006 |
| 3,6 | 0,0006 | 0006 | 0006 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0004 |
| 3,7 | 0,0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 |
| 3,8 | 0,0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 |
| 3,9 | 0,0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0001 | 0001 |

## Додаток 2 $y = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

| x | y | x | y | x | y | x | y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 00000 | | | | | | |
| 0,01 | 0,0040 | 0,13 | 0,0517 | 0,25 | 0,0987 | 0,37 | 0,1443 |
| 0,02 | 0,0080 | 0,14 | 0,0557 | 0,26 | 0,1026 | 0,38 | 0,1480 |
| 0,03 | 0,0120 | 0,15 | 0,0596 | 0,27 | 0,1064 | 0,39 | 0,1517 |
| 0,04 | 0,0160 | 0,16 | 0,0636 | 0,28 | 0,1103 | 0,40 | 0,1554 |
| 0,05 | 0,0199 | 0,17 | 0,0675 | 0,29 | 0,1141 | 0,41 | 0,1591 |
| 0,06 | 0,0239 | 0,18 | 0,0714 | 0,30 | 0,1179 | 0,42 | 0,1628 |
| 0,07 | 0,0279 | 0,19 | 0,0753 | 0,31 | 0,1217 | 0,43 | 0,1664 |
| 0,08 | 0,0319 | 0,20 | 0,0793 | 0,32 | 0,1255 | 0,44 | 0,1700 |
| 0,09 | 0,0359 | 0,21 | 0,0832 | 0,33 | 0,1293 | 0,45 | 0,1736 |
| 0,10 | 0,0398 | 0,22 | 0,0871 | 0,34 | 0,1331 | 0,46 | 0,1772 |
| 0,11 | 0,0438 | 0,23 | 0,0910 | 0,35 | 0,1368 | 0,47 | 0,1808 |
| 0,12 | 0,0478 | 0,24 | 0,0948 | 0,36 | 0,1406 | 0,48 | 0,1844 |
| 0,49 | 0,1879 | 1,02 | 0,3461 | 1,55 | 0,4394 | 2,16 | 0,4846 |
| 0,50 | 0,1915 | 1,03 | 0,3485 | 1,56 | 0,4406 | 2,18 | 04854 |
| 0,51 | 0,1950 | 1,04 | 0,3508 | 1,57 | 0,4418 | 2,20 | 0,4861 |
| 0,52 | 0,1985 | 1,05 | 0,3531 | 1,58 | 0,4429 | 2,22 | 0,4868 |
| 0,53 | 0,2019 | 1,06 | 0,3554 | 1,59 | 0,4441 | 2,24 | 0,4875 |
| 0,54 | 0,2054 | 1,07 | 0,3577 | 1,60 | 0,4452 | 2,26 | 0,4881 |
| 0,55 | 0,2088 | 1,08 | 0,3599 | 1,61 | 0,4463 | 2,28 | 0,4887 |
| 0,56 | 0,2123 | 1,09 | 0,3621 | 1,62 | 0,4474 | 2,30 | 0,4893 |
| 0,57 | 0,2157 | 1,10 | 0,3643 | 1,63 | 0,4484 | 2,32 | 0,4898 |
| 0,58 | 0,2190 | 1,11 | 0,3665 | 1,64 | 0,4495 | 2,34 | 0,4904 |
| 0,59 | 0,2224 | 1,12 | 0,3686 | 1,65 | 0,4505 | 2.36 | 0,4908 |
| 0,60 | 0,2257 | 1,13 | 0,3708 | 1,66 | 0,4515 | 2,38 | 0,4913 |
| 0,61 | 0,2291 | 1,14 | 0,3729 | 1,67 | 0,4525 | 2,40 | 0,4918 |
| 0,62 | 0,2324 | 1,15 | 0,3749 | 1,68 | 0,4535 | 2,42 | 0,4922 |
| 0,63 | 0,2357 | 1,16 | 0,3770 | 1,69 | 0,4545 | 2,44 | 0,4927 |
| 0,64 | 0,2389 | 1,17 | 0,3790 | 1,70 | 0,4554 | 2,46 | 0,4931 |
| 0,65 | 0,2422 | 1,18 | 0,3810 | 1,71 | 0,4564 | 2,48 | 0,4934 |
| 0,66 | 0,2454 | 1,19 | 0,3830 | 1,72 | 0,4573 | 2,50 | 0,4938 |
| 0,67 | 0,2486 | 1,20 | 0,3849 | 1,73 | 0,4582 | 2,52 | 0,4941 |
| 0,68 | 0,2517 | 1,21 | 0,3869 | 1,74 | 0,4591 | 2,54 | 0,4945 |
| 0,69 | 0,2549 | 1,22 | 0,3888 | 1,75 | 0,4599 | 2,56 | 0,4948 |
| 0,70 | 0,2580 | 1,23 | 0,3907 | 1,76 | 0,4608 | 2,58 | 0,4951 |
| 0,71 | 0,2611 | 1,24 | 0,3925 | 1,77 | 0,4616 | 2,60 | 0,4953 |
| 0,72 | 0,2642 | 1,25 | 0,3914 | 1,78 | 0,4625 | 2,62 | 0,4956 |
| 0,73 | 0,2673 | 1,26 | 0,3962 | 1,79 | 0,4633 | 2,64 | 0,4959 |
| 0,74 | 0.2703 | 1,27 | 0,3980 | 1,80 | 0,4641 | 2,66 | 0,4961 |
| 0,75 | 0,2734 | 1,28 | 0,3997 | 1,81 | 0,4649 | 2,68 | 0,4963 |
| 0,76 | 0,2764 | 1,29 | 0,4015 | 1,82 | 0,4656 | 2,70 | 0,4965 |
| 0,77 | 0,2794 | 1,30 | 0,4032 | 1,83 | 0,4664 | 2,72 | 0,4967 |
| 0,78 | 0,2823 | 1,31 | 0,4049 | 1,84 | 0,4671 | 2,74 | 0,4969 |
| 0,79 | 0,2852 | 1,32 | 0,4066 | 1,85 | 0,4678 | 2,76 | 0,4971 |
| 0,80 | 0,2881 | 1,33 | 0,4082 | 1,86 | 0,4686 | 2,78 | 0,4973 |
| 0,81 | 0,2910 | 1,34 | 0,4099 | 1,87 | 0,4693 | 2,80 | 0,4974 |
| 0,82 | 0,2939 | 1,35 | 0,4115 | 1,88 | 0,4699 | 2,82 | 0,4976 |
| 0,83 | 0,2967 | 1,36 | 0,4131 | 1,89 | 0,4706 | 2,84 | 0,4977 |
| 0.84 | 0,2995 | 1,37 | 0,4147 | 1,90 | 0,4713 | 2,86 | 0,4979 |
| 0,85 | 0,3023 | 1,38 | 0,4162 | 1,91 | 0,4719 | 2,88 | 0,4980 |
| 0,86 | 0,3051 | 1,39 | 0,4177 | 1,92 | 0,4726 | 2,90 | 0,4981 |
| 0,87 | 0,3078 | 1,40 | 0,4192 | 1,93 | 0,4732 | 2,92 | 0,4982 |
| 0,88 | 0,3106 | 1,41 | 0,4207 | 1,94 | 0,4738 | 2,94 | 0,4984 |
| 0,89 | 0,3133 | 1,42 | 0,4222 | 1,95 | 0,4744 | 2,96 | 0,4985 |
| 0,90 | 0,3159 | 1,43 | 0,4236 | 1,96 | 0,4750 | 2,98 | 0,4986 |
| 0,91 | 0,3186 | 1,44 | 0,4251 | 1,97 | 0,4756 | 3,00 | 0,49865 |
| 0,92 | 0,3112 | 1,45 | 0,4265 | 1,98 | 0,4761 | 3,20 | 0,49931 |
| 0,93 | 0,3238 | 1,46 | 0,4279 | 1,99 | 0,4767 | 3,40 | 0,49966 |
| 0,94 | 0,3264 | 1,47 | 0,4292 | 2,00 | 0,4772 | 3,60 | 0,499841 |
| 0,95 | 0,3289 | 1,48 | 0,4306 | 2,02 | 0,4783 | 3,80 | 0,499928 |
| 0,96 | 0,3315 | 1,49 | 0,4319 | 2,04 | 0,4793 | 4,00 | 0,499968 |
| 0,97 | 0,3340 | 1,50 | 0,4332 | 2,06 | 0,4803 | 4,50 | 0,499997 |
| 0,98 | 0,3365 | 1,51 | 0,4345 | 2,08 | 0,4812 | 5,00 | 0,49999997 |
| 0,99 | 0,3389 | 1,52 | 0,4357 | 2,10 | 0,4821 | | |
| 1,00 | 0,3413 | 1,53 | 0,4370 | 2,12 | 0,4830 | | |
| 1,01 | 0,3438 | 1,54 | 0,4382 | 2,14 | 0,4838 | | |

*Навчальне видання*

Методичні вказівки
до практичних занять та для самостійної роботи
з навчальної дисципліни

**«ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»**

(*для студентів 2 курсу денної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр галузі знань 0601 «Будівництво та архітектура» за напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво»*)

Укладачі: **ХРЕНОВ** Олександр Михайлович,
**ВОЄВОДІНА** Марина Юріївна

Відповідальний за випуск *д.т.н., проф. М. І. Самійленко*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2011, поз. 458М

---

Підп. до друку 27.06.2012 Формат 60×84/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 1,8
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011 р.